## Un problème de robinets.

Une baignoire de 96 L se remplit en 8 mn, robinet ouvert et bonde fermée. Elle se vide en 12 mn, bonde ouverte et robinet fermé. En combien de temps se remplit-elle bonde et robinet ouverts ('faut être c...!) ?

La réponse attendue au Certificat d'Études était la suivante : le robinet débite $96/8 = 12$ L/mn, la bonde $96/12 = 8$ L/mn. Les deux ouverts le débit est $12 - 8 = 4$ L/mnn, il faut donc $96/4 = 24$ mn.

***Question 1 :***
***Quelle réponse faut-il donner intégrer les CCP et...rater le certif' ?***

Pour la phase de remplissage de la baignoire de volume $V$ en un temps $T_1$, rien à dire, le débit volumique[1] du robinet est $D_1 = V/T_1$. Pour simplifier la suite supposons que la baignoire a des parois verticales, une surface $S$ et une hauteur $H$ donc

$$D_1 = S\,H/T_1 \qquad \text{(équation 1)}$$

Pour la phase de vidange, l'erreur est de considérer le débit comme constant. Quand la hauteur d'eau est $z$, considérons une ligne de courant qui part de la surface où l'altitude est $z$, la pression est $p_{atm}$ (pression atmosphérique) et la vitesse négligeable et ressort par la bonde de surface $\sigma$ en un point où l'altitude est nulle, la pression est $p_{atm}$ (sauf canalisation bouchée, dans le tuyau d'évacuation l'eau est en contact avec l'air, ce n'est pas une conduite forcée) et la vitesse $V_s$. L'écoulement est quasi-permanent (temps de vidange très long), incompressible car le fluide l'est et parfait car l'eau est peu visqueuse ; on peut donc appliquer le théorème de Bernoulli et affirmer

$$\frac{0^2}{2} + g\,z + \frac{p_{atm}}{\mu} = \frac{V_s^2}{2} + 0\,g + \frac{p_{atm}}{\mu}$$

$$\text{d'où} \qquad V_s = \sqrt{2\,g\,z}$$

formule classique connue sous le nom de formule de Torricelli.

Le débit volumique sortant par la bonde est alors

$$D_2(z) = \sigma\,V_s = \sigma\,\sqrt{2\,g\,z}$$

Pendant un temps $\mathrm{d}t$, il sort par la bonde un volume $\delta V = D_2\,\mathrm{d}t$ ; parallèlement le niveau passe de $z$ à $z + \mathrm{d}z$ (avec $\mathrm{d}z < 0$) donc le volume d'eau varie de $\mathrm{d}V = S\,\mathrm{d}z$ et bien évidemment $\mathrm{d}V = -\delta V$ d'où

$$S\,\mathrm{d}z = -\sigma\,\sqrt{2\,g\,z}\,\mathrm{d}t$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z}} = -\frac{\sigma\sqrt{2\,g}}{S}\,\mathrm{d}t$$

$$2\,\sqrt{z} = -\frac{\sigma\sqrt{2\,g}}{S}\,t + Cte$$

Or à $t = 0$ (début de la vidange), on a $z = H$, d'où

$$2\,\sqrt{z} = -\frac{\sigma\sqrt{2\,g}}{S}\,t + 2\,\sqrt{H}$$

Le temps de vidange $T_2$ est celui pour lequel $z = 0$ soit

$$T_2 = \frac{S}{\sigma}\sqrt{\frac{2\,H}{g}} \qquad \text{(équation 2)}$$

[1]Comme le fluide est incompressible, la conservation de la masse entraîne la conservation du volume et l'on peut sans danger utiliser les débits volumiques

Dans la dernière manipulation (bonde et robinet ouverts en même temps) le même raisonnement conduit, à partir de $\mathrm{d}V = (D_1 - D_2(z))\,\mathrm{d}t$, à l'équation différentielle (à partir de $\mathrm{d}V = (D_1 - D_2(z))\,\mathrm{d}t$) suivante

$$S\,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = D_1 - \sigma\,\sqrt{2\,g\,z}$$

La résolution relève plutôt des mathématiques et n'éclaire guère ce qui se passe. Il est plus intéressant de remarquer qu'il y a une valeur asymptotique $z_\infty$ évidente obtenue à l'égalité des débits telle que

$$D_1 = \sigma\,\sqrt{2\,g\,z_\infty} \qquad \text{soit} \qquad z_\infty = \frac{D_1^2}{2\,g\,\sigma^2}$$

et que selon que $z_\infty$ est plus grand ou plus petit que $H$, la baignoire déborde ou non ; le rapport $z_\infty/H$ est donc pertinent. On y reportera l'expression de $D_1$ en fonction de $T_1$ (équation 1) et celle de $\sigma$ en fonction de $T_2$ (équation 2)

$$\frac{z_\infty}{H} = \frac{D_1^2}{2\,g\,H\,\sigma^2} = \frac{(S\,H/T_1)^2}{2\,g\,H\,\left(\frac{S}{T_2}\,\sqrt{\frac{2\,H}{g}}\right)^2} = \left(\frac{T_2}{2\,T_1}\right)^2$$

Avec les données de l'énoncé, $T_1 = 8$ min et $T_2 = 12$ min, on a $z_\infty/H = 9/16 = 0,56$, la baignoire se stabilise à un niveau à peine supérieur la moitié, ce qui n'a rien à voir avec la solution du Certif' !